数理解析研究所講究録 1203 巻 2001 年 21-30

パンルベ方程式と超幾何函数

大阪大学理学研究科・大山陽介

1 はじめに

Painlevé 方程式の特殊解には、有理函数(代数函数)とリッカチ解と呼ばれる線型微分方程式に帰着する解の2つがある。Painlevé I 型の全ての解は超越的であり、Painlevé II 型〜VI 型のリッカチ解、有理函数解は完全に分類されている。Painlevé VI 型については、種数の高い代数函数解を持つことが知られているが、その分類は難解と思われる。Dubrovin-Mazzocco によって、Painlevé VI のある 1-parameter family (Affine Weyl 群の3つの Wall の intersenction)の場合は、代数函数解が完全に決定されている。

Painlevé 方程式は4点の確定特異点、もしくはそれを合流させた不確定特異点をもつ2階の線型方程式のモノドロミ保存変形として得られた。もっと多くの特異点を持つ場合、退化を含めた Garnier 方程式を得るが、(退化) Garnier 方程式の特殊解については、その研究は少ないようである。

ここでは、(退化) Garnier 方程式の特殊解として、線型微分方程式に帰着する解について調べる。退化しない Garnier 方程式(2階確定特異点型線型方程式のモノドロミ保存変形)については、Lauricella 方程式に帰着する解が存在することが知られている ([8])。また、木村弘信氏 ([4]) によって、2次元の(退化) Garnier 方程式、すなわち、5点の確定特異点、もしくはそれを合流させた不確定特異点をもつ2階の線型方程式のモノドロミ保存変形を表す方程式が調べられており、この場合も、線型微分方程式に帰着する解が存在することが知られている ([8])。

木村弘信氏の計算は、モノドロミ保存の方程式を直接計算する膨大なもので、2次元以上に一般化していくことは困難である。そこで、ここでは見方を変えて、Twistor 理論を用いて Schlesinger 方程式を構成し、線型微分方程式に帰着する解がどういう場合に表れるか、幾何学的に構成することにする。この見方によって、「Garnier 方程式の退化図式」「超幾何方程式の合流図式」「自然数の分解」の3つが平行して成り立っている事実が、わかりやすくなったと思う。

Twistor 理論を用いれば、自己双対 Yang-Mills 接続は、twistor 空間と呼ばれる3次元の複素多様体のうえの正則 vector bundle の複素構造から決まる。特別な場合として、twistor 空間のうえの正則 line bundle を取ると、linear field equation (本質的に maxwell 方程式) の解が得られる。適当な群 G をもってきて、G 不変な自己双対 Yang-Mills 接続や linear field equation を考えると、それぞれ、Schlesinger 方程式や青本・ゲルファントの超幾何方

程式をえる。ここで、群 G は、conformal 変換の極大可換アーベル群をとる。表にすると

	ツイスタ理論	G-不変
可換	linear field equation	超幾何
非可換	自己双対 Yang-Mills	Painlevé

である。この意味で、「Painlevé 方程式は超幾何方程式の非アーベル類似」と考えることができる。合流の場合も同様であり、自己双対 Yang-Mills 接続の高次元版である hyperkähler 接続をとれば、Garnier 方程式を得る。

2 リッカチ解について

Painlevé 方程式のリッカチ解について復習する。P_{IV} 方程式

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{2q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}q^3 + 4tq^2 + 2(t^2-\alpha)q + \frac{\beta}{q}$$

を例に取る。P_{IV} 方程式を次のようにハミルトン形式に書き直す：

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -2q^2 + (2p+2t)q - \alpha_1, \\ \dfrac{dp}{dt} = 4pq - (p^2 + 2tp + 2\alpha_2) \end{cases}$$

$$\alpha = -\alpha_2 + 2\alpha_1 + 1, \quad \beta = -2\alpha_2^2$$

この式で $\alpha_2 = 0$ とおいてみると、特殊解 $p = 0$ が存在して、q については

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -2q^2 + 2tq - \alpha_1, \\ p = 0 \end{cases}$$

というリッカチ型の方程式になることがわかる。よく知られているように、$u = \dfrac{1}{2q}\dfrac{dq}{dt}$ とおくと、リッカチ方程式は線型化できて、今の場合は Hermite-Weber の方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt} + 2\alpha_1 u = 0.$$

になる。

この方法は、I 型を除く、他の Painlevé 方程式にも適用されるだけでなく、(退化) Garnier 系の場合にも同様に用いることができる。Painlevé 方程式の場合、2 つの退化図式が平行して成り立つ。

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{IV} \arrow[dr] & \\ \mathrm{VI} \arrow[r] & \mathrm{V} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{II} \\ & & \mathrm{III} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Figure 1: Painlevé 方程式の退化図式

$$\begin{tikzcd} & & \text{Weber} \arrow[dr] & \\ \text{Gauss} \arrow[r] & \text{Kummer} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Airy} \\ & & \text{Bessel} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Figure 2: 超幾何方程式の合流図式

すなわち、Painlevé VI 方程式の特殊解として Gauss 超幾何函数があらわれ、Painlevé V 方程式の特殊解として、Kummer 超幾何函数があらわれ（以下同様）という形をしており、両者の合流図式は平行している。さらに、「自然数 4 の分解」の合流図式も成り立つ：

$$\begin{tikzcd} & & (1,3) \arrow[dr] & \\ (1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (4) \\ & & (2,2) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Figure 3: 4 の分解

この図式は、Painlevé 方程式の元になる、モノドロミが保存される線型方程式の特異点の型を表している。各数字は、不確定特異点の Poincare rank に 1 を加えたものである（Poincare rank が 0 のものは、確定特異点と思うことにする）。すなわち、Painlevé VI 方程式は確定特異点 4 つのモノドロミ保存変形、Painlevé VI 方程式は確定特異点 2 つと Poincare rank が 1 の不確定特異点 1 つのモノドロミ保存変形という形をしている。

この 3 つの合流図式をはっきり指摘したのは、たぶん岡本和夫氏だと思う。また、木村弘信氏によって、2 次元の退化 Garnier 方程式の場合（5 の分解にあたる）にも計算されており、一般の場合にも直接計算されないまで

も認識されていた。木村氏の計算をそのまま一般の場合に適用するのはたいへんなので、ここでは、Mason-Woodhouse による Twistor 理論を使ったアプローチを用いる（[7]）。

3 超幾何函数〜Twistor 理論の立場から

青本・ゲルファントの超幾何函数のもとになっているのは、ラドン変換である。$P^{N-1}(\mathbb{C})$ の上の -2 次斉次な解析函数 $f(z) = f(z_1, ..., z_N)$ に対して、ラドン変換

$$F(x) = \int_\gamma f(x_{11}t_1 + x_{21}t_2, ..., x_{1N}t_1 + x_{2N}t_2)(t_1dt_2 - t_2dt_1).$$

を取る。

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \end{pmatrix}$$

をグラスマン多様体 $Gr(N,2)$ の座標だと思う。明らかに、$F(x)$ は次の方程式を満たす：

$$F(k \cdot x) = (\det k)^{-1} F(x). \tag{3.1}$$

ここで、$k \in GL(2,\mathbb{C})$ の自然な左作用を取っている。また、線型方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{1j}\partial x_{2k}} F(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_{1k}\partial x_{2j}} F(x). \tag{3.2}$$

も満たしている。

$\mathcal{S}$ を (3.1)、(3.2) を満たす函数全体とする。Twistor 理論によると、$\mathcal{S}$ の元 $F(x)$ は、つねに $f(z)$ のラドン変換で表される（[9]）。

グラスマン多様体には、右から作用している $PGL(N,\mathbb{C})$ の極大アーベル部分群 G を考える。青本・ゲルファントの超幾何函数は、$\mathcal{S}$ の元でさらに G 不変性をもつものと考えられる。

$PGL(N,\mathbb{C})$ の極大アーベル部分群 G について、ゲルファントは、対角行列全体か（Jordan）ブロックが 1 つの場合のみについて考察した ([2]) が、ここでは [5] and [6] にしたがって、中間の場合も扱う。

$G \subset PGL(N)$ を次のようなブロック分解を持つ行列全体とする：

$$h = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_r \end{pmatrix},$$

ここで、C_j は 次のような $k_j \times k_j$ 行列である

$$C_j = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k_j} \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k_j-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{k_j-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

ここで、$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = N$. G は $P^{N-1}(\mathbb{C})$ に prehomogeneous に作用する。$(k_1, k_2, ..., k_r)$ で、G のブロック・タイプを表すことにする。

G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ の指標

$$\chi : \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

を一つ固定する。 $\chi(aE_N) = a^{-k}$ for any $a \in \mathbb{C}^{\times}$ (E_N は単位行列) と仮定する。χ は、G の多価指標と思える（超幾何函数の多価性を表している)。

S の元の中で、このような G の左作用によって不変な函数が、青本・ゲルファントの超幾何函数である。すなわち、(3.1)、(3.2) に加えて、

$$F(zh) = \chi(h)F(z) \quad \text{for} \quad h \in \tilde{G} \tag{3.3}$$

となるものが、$Gr(2, N)$ の上の青本·ゲルファントの超幾何函数である ([2])。なお、一般のグラスマン多様体 $Gr(k, N)$ の上でも同様に定義できる。

G として対角行列全体、すなわち、$(1, 1, ..., 1)$ タイプのものを取る。この場合、G と $GL(2, \mathbb{C})$ の作用によって

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 & x_5 & \cdots & x_N \end{pmatrix}$$

と正規化できる。G 不変性から

$$f(z) = {z_1}^{\alpha_1} {z_2}^{\alpha_2} \cdots {z_N}^{\alpha_N}$$

となるので、この $f(z)$ の Radon 変換を取ると

$$F(x_4, x_5, ..., x_N) = \int t^{\alpha_2}(t-1)^{\alpha_3}(t-x_4)^{\alpha_4} \cdots (t-x_N)^{\alpha_N} dt$$

となる。これは、いわゆる Lauricella の超幾何函数である。一般のタイプの場合、Lauricella の超幾何函数を合流させたものになる。また $N = 4$ のとき、よく知られた Gauss の超幾何函数になる。

対角型でない G を取ると、合流超幾何函数を得る。 $N = 4$ のときに考えると、2 節の Figure 1 と 2 の図式が得られる。

4 モノドロミ保存変形〜Twistor 理論の立場から

いわゆる flat twistor theory について復習する。flat twistor theory とは、次のような3つ組

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Flag}(1,2,N) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Gr(2,N) & & \mathbb{CP}^{N-1} \end{tikzcd}$$

を考える。$Gr(2,N)$ を時空、$\mathbb{CP}^{N-1}$ を twistor 空間だと思う。実際、$N=4$ のときは、$Gr(2,4)$ は S^4 の複素近傍、$\mathbb{CP}^3$ は、S^4 の twistor 空間に他ならない。

さて、自己双対 Yang-Mills 接続を多変数化した、hyperkähler 接続を定義しよう。

Definition 4.1. $Gr(2,N)$ の上の接続

$$\tilde{\nabla}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} - B_{ij}(z), \quad B_{ij}(z) \in \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$$

が *hyperkähler* 接続とは

$$\left[\tilde{\nabla}_{1j} + \lambda\tilde{\nabla}_{2j}, \tilde{\nabla}_{1k} + \lambda\tilde{\nabla}_{2k}\right] = 0 \tag{4.1}$$

が任意の j,k and λ に対して成り立つことをいう。

この定義は、普通のものと異なる。N が偶数のときは通常の定義と一致するが、N が奇数のときは、$Gr(2,N)$ の次元が 4 の倍数にならないので、hyperkähler 接続は定義できない。しかし、その場合も方程式は同じなので定義を拡張する。[7] では GASDYM (generalized anti-self-dual Yang-Mills) 方程式とよんでいる。

Penrose の Twistor 理論（[7]、[9]）を使うと、次の定理が成り立つ。

Theorem 4.2. U を $\mathbb{CP}^{N-1}$ の開集合で、複素直線を含むものとする。U のうえの正則ベクトル束 E について、U に含まれる任意の複素直線の上では自明であるとする。このとき、E に対応して、$Gr(2,N)$ の上の *hyperkähler* 接続が存在する。

詳細は略するが、$\mathbb{CP}^{N-1}$ の複素直線（twistor line という）L は、$Gr(2,N)$ の1点 x_L に対応するので、E が L の上では自明であることから、

$$\tilde{E}_{x_L} = \Gamma(L,E)$$

とおくことで、$Gr(2,N)$ の上のベクトル束 $\tilde{E}$ が構成される。$\tilde{E}$ の上の接続を構成するには、$\tilde{E}$ の平行移動を定めればよい。L の上の1点 z には z を通る twistor line 全体、すなわち $Gr(2,N)$ の上の $N-2$ 次元部分空間が対応すると考えられる。この部分空間の上に $\tilde{E}$ を制限すると、z を通る twistor line の上の global section を z に制限することで flat な平行移動が定まる。この flatness が hyperkähler 接続になることと同値である。

この Penrose の定理に、極大アーベル部分群 G による作用を考えると Schlesinger 方程式を得る（[7]）。

Theorem 4.3. 定理 *4.2* で、さらに U は G 不変とする。G の作用は E に持ち上がると仮定すると G の無限小作用は *Schlesinger* 方程式に等価である。

G は可換であり、$\mathbb{CP}^{N-1}$ に prehomogenious に作用するので、G の無限小作用は、E の上の flat 接続を定める。この接続を各々の twistor line に制限すると、そこでは E は自明なので、常微分方程式を定める。各 twistor line の上でのモノドロミは、全体のモノドロミと等しいので、モノドロミ保存変形を得る。

Twistor 理論を使って、モノドロミ保存変形を導く手法は他にも用いられている。たとえば、Hitchin（[3]）は、$SU(2)$ 不変な自己双対計量が、Painlevé VI 型方程式の特別な場合（3次元の Frobenius 構造と関係している。Dubrovin-Mazzocco の PVI_μ 方程式と同じものである）になることを示した。

$N=4$ の場合、Painlevé 方程式になる。ここで、G のタイプが $(1,1,1,1)$ の場合、Painlevé VI、$(1,1,2)$ の場合が Painlevé V になる。こうして、2節の Figure 1 と 3 の図式が得られる。また、$N=4$ の場合、hyperkähler 接続は自己双対 Yang-Mills 接続になるので、自己双対 Yang-Mills 方程式の reduction として、Painlevé 方程式が得られることになる。

例）G が対角型のとき、E の上の接続は

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{d}{dz_j}-\frac{A_j}{z_j}\right)dz_j,$$

とかける。この接続を twistor line

$$z_j = p_j\zeta - q_j.$$

に制限すると、常微分方程式

$$\frac{d}{d\zeta}\Psi = \sum_{j=1}^{N}\frac{p_jA_j}{p_j\zeta-q_j}\Psi. \tag{4.2}$$

を得る。この twistor line は $(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ と $(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ を通る複素直線であるが、$Gr(2,N)$ の上の点

$$x=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_N \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_N \end{pmatrix}$$

に対応するものである。

twistor lines を動かすことは、p_j, q_j を動かすことにあたる。これによって、Schlesinger 方程式

$$\frac{\partial A_j}{\partial t_k} = \frac{[A_j, A_k]}{t_j - t_k}, \qquad (j \neq k) \tag{4.3}$$

をえる。ここで、$t_j = \dfrac{q_j}{p_j}$.

5 Schlesinger 方程式の特殊解

以下、E は rank 2 のベクトル束とする。2x2 の Schlesinger 方程式は、退化した場合も含めて、Garnier 方程式と本質的に等価である。Garnier 方程式のリッカチ解は、[8] によって Lauricella の超幾何函数になることが知られている。[4] には、2 次元 Garnier 方程式の退化した場合（われわれの言葉でいうと、(1,1,1,1,1) からの合流）について、詳しく調べられている。

Schlesinger 方程式の立場で言うと、線型方程式に帰着する解というのは、本質的には Schlesinger 方程式が（上半）三角行列になる場合である。このとき、Schlesinger 方程式が線型方程式になることは、ほとんど自明であるが、具体的にどういう線型方程式に帰着するかはそれほど簡単ではない。われわれの見方、「Schlesinger 方程式は G 不変な hyperkähler 接続であり、超幾何函数は G 不変な linear field である」という立場にたつと、出てくる線型方程式がどのようなものであるかが、簡単に示される。こうして、2 節で書いた 3 つの合流図式が多変数化したところでも成り立つことがわかるのである。

主定理を述べる：

Theorem 5.1. *Theorem 4.3* の仮定の元で、 E の *rank* が *2* とする。E が G-不変な直線束 L_1 を含み、なおかつ、L_1 は任意の *twistor line* のうえで自明とする。このとき、*Schlesinger* 方程式は青本・ゲルファントの超幾何函数で解ける解を持つ。

E が G-不変な直線束 L_1 を含むということは、E 上に G が定める flat 接続が（上半）三角行列の形をしているということである：

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{d}{dz_j} - \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 0 & d_j \end{pmatrix} \right) dz_j. \tag{5.1}$$

対角成分 a_j, d_j は、局所モノドロミを与えるので、 twistor line によらない定数である。

$$b = \sum_j b_j dz_j \in H^0(U, Hom(E/L_1, L_1) \otimes \Omega^1)$$

を twistor 変換すれば、超幾何函数になることがわかる。

Example 1. G が $(1,1,1,1)$ 型の場合を考える。Schlesinger 方程式は Painleé VI になる。(4.2) で

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

とする。A_4 を対角行列と仮定してよいので、(4.3) は

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{[A_3, A_1]}{t}, \tag{5.2}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \frac{[A_3, A_2]}{t-1}. \tag{5.3}$$

となる。a_j and d_j are independent of t for any $j = 1, 2, 3$ であり、

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{1}{t}\left(e_3 b_1 - e_1 b_3\right),$$

$$\frac{db_2}{dt} = \frac{1}{t-1}\left(e_3 b_2 - e_2 b_3\right),$$

$(e_j = a_j - d_j)$ となる。e_j が指標を表すことに注意しておく。$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$ かつ A_4 が対角型であることから $b_3 = -(b_1 + b_2)$. 以上から、b_1 の方程式として、Gauss 超幾何方程式

$$t(t-1)\frac{d^2}{dt^2}b_1 - ((e_1 + e_2 + 2e_3)t - e_0 - e_2 + 1)\frac{d}{dt} + e_3(e_1 + e_2 + e_3)b_1 = 0$$

を得る。

E の rank が高いときも、flag 構造を仮定する（三角行列になるとき）と、超幾何タイプの線型方程式が表れるが、簡単な形で表現することができない。今後の問題である。

References

[1] Dubrovin, B., Mazzocco,M., *Monodromy of certain Painleve' VI transcendents and reflection groups*, math.AG/9806056.

[2] Gel'fand, I. M., Graev, M. I., Retakh, V. S., *General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type*, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 4(286), 3–82, 235; translation in Russian Math. Surveys **47** (1992), no. 4, 1–88.

[3] N.J. Hitchin *Twistor spaces, Einsten metrics and isomonodromic deformations*, J. Diff. Geom. **42** (1995) 30–112.

[4] Kimura, H., *The degeneration of the two-dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **155** (1989), 25–74.

[5] Kimura, H., Haraoka, Y., Takano, K., *The generalized confluent hypergeometric functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68** (1992), no. 9, 290–295

[6] Kimura, H., Koitabashi, T., *Normalizer of maximal abelian subgroups of $GL(n)$ and general hypergeometric functions*, Kumamoto J. Math. **9** (1996), 13–43.

[7] Mason, L. J.; Woodhouse, N. M. J., *Integrability, self-duality, and twistor theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 15. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[8] Okamoto, K., Kimura, H., *On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **37** (1986), no. 145, 61–80.

[9] Ward, R. S. and Wells. Jr., R. O., Twistor Geometry and Field Theory, Cambridge University Press (1990).